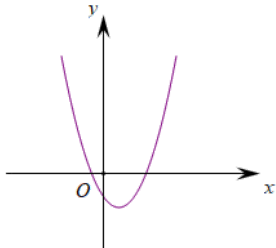
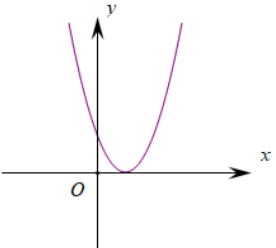
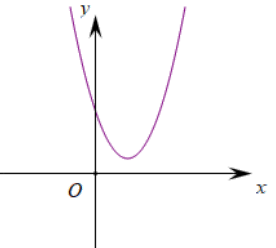


# 第3讲 二次函数与方程、不等式

## 一、二次函数与坐标轴交点

①二次函数与  $y$  轴交点坐标：令  $x=0$ ，得  $y=b$ ，因此与  $y$  轴交点坐标为  $(0, b)$

②二次函数与  $x$  轴交点坐标：令  $y=0$ ，得  $ax^2+bx+c=0$ ，因此方程  $ax^2+bx+c=0$  的解可以看做函数  $y=ax^2+bx+c$  的图象与  $x$  轴交点的横坐标，交点的个数决定方程解的个数。

|             |                                                                                   |                                                                                    |                                                                                     |
|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|             |  |  |  |
| 与 $x$ 轴交点个数 | 2                                                                                 | 1                                                                                  | 没有                                                                                  |
| 判别式         | $\Delta > 0$                                                                      | $\Delta = 0$                                                                       | $\Delta < 0$                                                                        |
| 根的情况        | 有两个不等实根                                                                           | 有两个相等实根                                                                            | 没有实数根                                                                               |

**【备注】** 判断二次函数与  $x$  轴的交点情况可直接通过  $\Delta$  进行判断，注意求解  $\Delta$  时要先将二次函数转化为一般式；当二次函数解析式与一元二次方程一般式相同时，若给定二次函数与  $x$  轴交点坐标，也可直接得到该方程的根；已知一个点坐标和对称轴也可求得另一个交点

🍎 举个“栗子”

栗子1

1. 2019~2020学年9月天津红桥区天津市方舟中学初三上学期月考第3题3分 ★

抛物线  $y = x^2 - 3x + 2$  与  $y$  轴交点的坐标为 ( ) .

A. (0, 2)

B. (1, 0)

C. (2, 0)

D. (0, -3)

**【备注】** 二次函数与  $y$  轴交点坐标为  $(0, c)$

**【答案】** A

**【解析】** 对于  $y = x^2 - 3x + 2$ ，

当  $x = 0$  时， $y = 2$ ，

则抛物线  $y = x^2 - 3x + 2$  与  $y$  轴交点的坐标为  $(0, 2)$  .

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

栗子2

2. 2018~2019学年天津河西区初三上学期期末第9题3分 ★★

若抛物线  $y = 2x^2 - 3x - k$  与  $x$  轴没有交点，则  $k$  的取值范围为（ ）。

- A.  $k \leq -\frac{9}{8}$       B.  $k < -\frac{9}{8}$       C.  $k \geq -\frac{9}{8}$  且  $k \neq 0$       D.  $k > -\frac{9}{8}$  且  $k \neq 0$

【备注】二次函数与  $x$  轴没有交点即  $\Delta < 0$ ，列不等式即可

【答案】B

【解析】抛物线与  $x$  轴无交点，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac < 0,$$

$$\therefore (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-k) < 0,$$

$$\text{即 } 9 + 8k < 0,$$

$$\text{解得 } k < -\frac{9}{8}.$$

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

3. 2018~2019学年10月湖北武汉洪山区武汉市卓刀泉中学初三上学期月考第7题3分 ★★

已知函数  $y = (k-3)x^2 + 2x + 1$  的图象与  $x$  轴有交点，则  $k$  的取值范围是（ ）。

- A.  $k < 4$       B.  $k \leq 4$       C.  $k < 4$  且  $k \neq 3$       D.  $k \leq 4$  且  $k \neq 3$

【备注】注意两道题的区别，题中说的是函数，既可以是一次函数也可以是二次函数，一次函数一定会与  $x$  轴相交，因此  $k=3$  成立

【答案】B

【解析】①当  $k-3 \neq 0$  时， $(k-3)x^2 + 2x + 1 = 0$ ，

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(k-3) \times 1 = -4k + 16 \geq 0,$$

$$\text{解得 } k \leq 4.$$

②当  $k-3=0$ ，即  $k=3$  时， $y=2x+1$ ，与  $x$  轴有一个交点，

故  $k$  的取值范围是  $k \leq 4$ 。

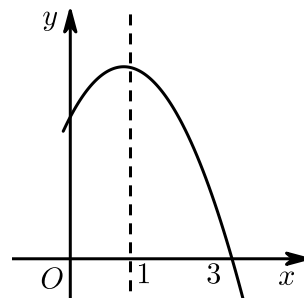
故答案为： $k \leq 4$ 。

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

栗子3

4. 2019~2020学年浙江宁波奉化市溪口中学初三上学期期中（尚田中学等五校联考）第15题4分 ★★

已知二次函数  $y = -x^2 + 2x + m$  的部分图象如图所示，则关于  $x$  的一元二次方程  $-x^2 + 2x + m = 0$  的解为 \_\_\_\_\_ .



**【备注】** 另一个根即为 3 关于 1 的对称点

**【答案】**  $x_1 = -1$  或  $x_2 = 3$

**【解析】** 依题意得二次函数  $y = -x^2 + 2x + m$  的对称轴为  $x = 1$ ，与  $x$  轴的一个交点为  $(3, 0)$ ，  
 $\therefore$  抛物线与  $x$  轴的另一个交点横坐标为  $1 - (3 - 1) = -1$ ，  
 $\therefore$  交点坐标为  $(-1, 0)$ ，  
 $\therefore$  当  $x = -1$  或  $x = 3$  时，函数值  $y = 0$ ，  
 即  $-x^2 + 2x + m = 0$ ，  
 $\therefore$  关于  $x$  的一元二次方程  $-x^2 + 2x + m = 0$  的解为  $x_1 = -1$  或  $x_2 = 3$  .  
 故答案为： $x_1 = -1$  或  $x_2 = 3$  .

**【标注】** 【知识点】二次函数与坐标轴交点

5. 2013年江苏苏州中考真题第6题3分 ★★

已知二次函数  $y = x^2 - 3x + m$  ( $m$  为常数) 的图象与  $x$  轴的一个交点为  $(1, 0)$ ，则关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 3x + m = 0$  的两实数根是 ( ) .

- A.  $x_1 = 1$  ,  $x_2 = -1$     B.  $x_1 = 1$  ,  $x_2 = 2$     C.  $x_1 = 1$  ,  $x_2 = 0$     D.  $x_1 = 1$  ,  $x_2 = 3$

**【备注】** 一元二次方程与二次函数解析式相同，因此两个根关于对称轴对称

**【答案】** B

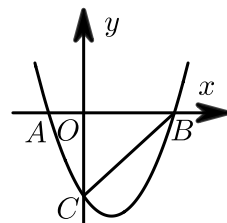
**【解析】**  $\because$  二次函数的解析式是  $y = x^2 - 3x + m$  ( $m$  为常数) ,  
 $\therefore$  该抛物线的对称轴是直线  $x = \frac{3}{2}$  .  
 又  $\because$  二次函数  $y = x^2 - 3x + m$  ( $m$  为常数) 的图象与  $x$  轴的一个交点为  $(1, 0)$  ,  
 $\therefore$  根据抛物线的对称性质知，该抛物线与  $x$  轴的另一个交点的坐标是  $(2, 0)$  ,  
 $\therefore$  关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 3x + m = 0$  的两实数根分别是： $x_1 = 1$  ,  $x_2 = 2$  .  
 故选 B .

【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

栗子4

6. 2019~2020学年10月天津河西区天津市新华中学初三上学期月考第8题3分 ★★

如图，二次函数  $y = x^2 - 2x - 3$  的图象与  $x$  轴交于  $A$ 、 $B$  两点，与  $y$  轴交于点  $C$ ，则下列说法错误的是（ ）。



A.  $AB = 4$

B.  $\angle OCB = 45^\circ$

C. 当  $x > 3$  时， $y > 0$

D. 当  $x > 0$  时， $y$  随  $x$  的增大而减小

【备注】此题需要令  $y = 0$  解一元二次方程求出  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点坐标再进行判断

【答案】D

【解析】当  $y = 0$  时， $x^2 - 2x - 3 = 0$ ，解得  $x_1 = -1$ ， $x_2 = 3$ ，

$\therefore A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ，

$\therefore AB = 3 - (-1) = 4$ ，

当  $x < -1$  或  $x > 3$  时， $y > 0$ ，

$\therefore$  抛物线的对称轴为直线  $x = 1$ ，

$\therefore$  当  $x < 1$  时， $y$  随  $x$  的增大而减小；

当  $x = 0$  时， $y = x^2 - 2x - 3 = -3$ ，则  $C(0, -3)$ ，

$\therefore OB = OC = 3$ ，

$\therefore \triangle OCB$  为等腰直角三角形，

$\therefore \angle OCB = 45^\circ$ 。

故选 D。

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

栗子5

🔍 图象法求一元二次方程的近似根

7. 2017~2018学年福建漳州平和县初三上学期期中第9题4分 ★★★

根据下列表格中的对应值，判断一元二次方程  $x^2 - 4x + 2 = 0$  的解的取值范围是（ ）。

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

|                |   |      |    |       |    |       |    |      |   |
|----------------|---|------|----|-------|----|-------|----|------|---|
| $x$            | 0 | 0.5  | 1  | 1.5   | 2  | 2.5   | 3  | 3.5  | 4 |
| $x^2 - 4x + 2$ | 2 | 0.25 | -1 | -1.75 | -2 | -1.75 | -1 | 0.25 | 2 |

A.  $0 < x < 0.5$  , 或  $3.5 < x < 4$

B.  $0.5 < x < 1$  , 或  $3 < x < 3.5$

C.  $0.5 < x < 1$  , 或  $2 < x < 2.5$

D.  $0 < x < 0.5$  , 或  $3 < x < 3.5$

**【备注】** 对于函数而言, 若  $x = x_1$  ,  $y > 0$  ;  $x = x_2$  ,  $y < 0$  ; 则方程必有一根在  $x_1$  和  $x_2$  之间 ; 因此寻找表格中函数值异号的  $x$  即可

**【答案】** B

**【解析】** 根据表格中的对应值, 得  $x = 0.5$  时,  $x^2 - 4x + 2 = 0.25$  ,

$x = 1$  时,  $x^2 - 4x + 2 = -1$  ;

$x = 3$  时,  $x^2 - 4x + 2 = -1$  ,

$x = 3.5$  时,  $x^2 - 4x + 2 = 0.25$  .

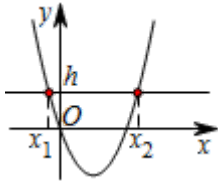
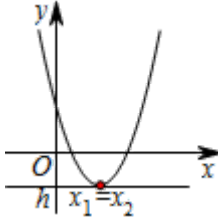
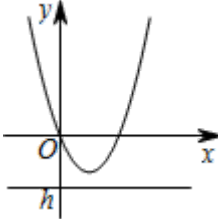
判断一元二次方程  $x^2 - 4x + 2 = 0$  的解的取值范围是  $0.5 < x < 1$  , 或  $3 < x < 3.5$  ,

故选 : B .

**【标注】** 【知识点】 估算一元二次方程的近似解

## 二、 二次函数与平行于 $x$ 轴直线交点

求抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与直线  $y = h$  的交点 :

| $ax^2 + bx + c - h = 0$<br>的判别式 $\Delta$ | 图象<br>(以 $a > 0$ 为例)                                                              | 与直线 $y = h$<br>的交点情况 | 一元二次方程根的情况          |
|------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------|---------------------|
| $\Delta > 0$                             |  | 有 <u>两</u> 个交点       | 有 <u>两个不相等</u> 的实数根 |
| $\Delta = 0$                             |  | 有 <u>一</u> 个交点       | 有 <u>两个相等</u> 的实数根  |
| $\Delta < 0$                             |  | <u>无</u> 交点          | <u>无</u> 实数根        |

**【备注】** 令  $y = h$ ，得到一元二次方程  $ax^2 + bx + c - h = 0$ ，此一元二次方程的解就是抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与直线  $y = h$  的交点的横坐标值。

因此抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与直线  $y = h$  的交点情况决定一元二次方程  $ax^2 + bx + c - h = 0$  根的情况。

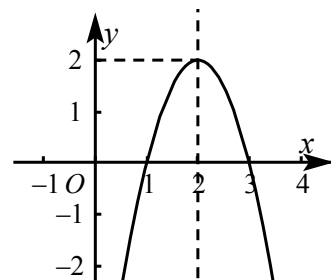
**注意：**解题时首先要确保一元二次方程的一般式与二次函数解析式相同；如若没有图象但是要求方程的根，正常解方程就可以

## 🍌 举个“栗”子

### 栗子6

#### 8. 2019~2020学年10月天津和平区天津市双菱中学初三上学期月考第14题 ★★

二次函数  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  的图象如图所示，根据图象可知：方程  $ax^2 + bx + c = k$  有两个不相等的实数根，则  $k$  的取值范围为 \_\_\_\_\_。



**【备注】** 方程的根为二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  与  $y = k$  的交点横坐标，方程有两个不相等的实数

根即与  $y = k$  有两个不同的交点

**【答案】**  $k < 2$

**【解析】** 根据题意得：二次函数的图象与  $x$  轴的交点为：(1, 0)、(3, 0)，

设二次函数  $y = a(x-1)(x-3)$ ，

把点 (2, 2) 代入得： $a = -2$ ，

∴ 二次函数的解析式为： $y = -2(x-1)(x-3)$ ，

即  $y = -2x^2 + 8x - 6$ 。

∴ 方程  $-2x^2 + 8x - 6 = k$  有两个不相等的实数根，

∴  $-2x^2 + 8x - 6 - k = 0$ ，

$\Delta = 8^2 - 4 \times (-2) \times (-6 - k) > 0$ ，

解得： $k < 2$ 。

**【标注】** 【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

栗子7

9. 2018~2019学年10月天津河北区天津外国语大学附属外国语学校初三上学期月考第13题4分 ★★

二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  图象上部分点的坐标满足下表：

|     |     |    |    |    |    |     |     |
|-----|-----|----|----|----|----|-----|-----|
| $x$ | ... | -3 | -2 | -1 | 0  | 1   | ... |
| $y$ | ... | -3 | -2 | -3 | -6 | -11 | ... |

若关于  $x$  的一元二次方程  $ax^2 + bx + c - m = 0$  有两个不相等的实数根，则  $m$  的取值范围是 \_\_\_\_\_。

**【备注】** 先将方程进行移项得  $ax^2 + bx + c = m$ ，方程的根即二次函数与  $y = m$  的交点横坐标；根据表中的点坐标可得顶点为  $(-2, -2)$  画出函数图象后可得开口方向向下

**【答案】**  $m < -2$

**【解析】** ∵  $y = ax^2 + bx + c$  过点  $(-2, -2)$ ， $(-1, -3)$ ， $(0, -6)$ 。

$$\therefore \begin{cases} 4a - 2b + c = -2 \\ a - b + c = -3 \\ c = -6 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \\ c = -6 \end{cases},$$

∴  $y = -x^2 - 4x - 6$ ，

∴  $-x^2 - 4x - 6 - m = 0$  有两个不相等的实数根，

∴  $(-4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6 - m) > 0$ ，

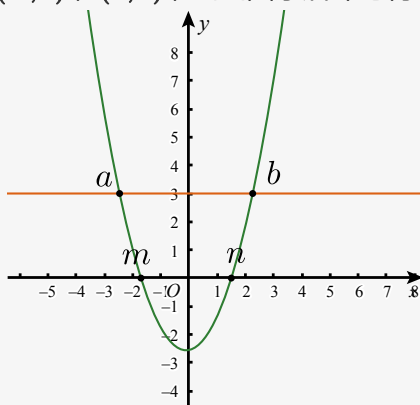
∴  $m < -2$ 。

**【标注】** 【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

## 10. 2017~2018学年10月天津河西区天津市第四十一中学初三上学期月考第20题3分 ★★

已知函数  $y = 3 - (x - m)(x - n)$ ,  $m < n$ , 并且  $a, b$  ( $a < b$ ) 是方程  $3 - (x - m)(x - n) = 0$  的两个根, 则实数  $m, n, a, b$  的大小关系可能是 \_\_\_\_\_. (用“<”号连接)

**【备注】** 将方程  $3 - (x - m)(x - n) = 0$  移项可得  $(x - m)(x - n) = 3$ , 方程的根即为二次函数  $y = (x - m)(x - n)$  与直线  $y = 3$  交点的横坐标,  $y = (x - m)(x - n)$  为二次函数的交点式, 可得与  $x$  轴两个交点坐标为  $(m, 0), (n, 0)$ , 画出图象后即可得到  $m, a, b, n$  的大小关系



**【答案】**  $a < m < n < b$

**【解析】** 由  $3 - (x - m)(x - n) = 0$  变形得,

$$(x - m)(x - n) = 3,$$

$$\therefore x - m > 0, x - n > 0,$$

$$\text{或 } x - m < 0, x - n < 0,$$

$$\therefore x > m, x > n, \text{ 或 } x < m, x < n,$$

$\therefore a, b$  是方程的两个根, 将其代入, 得

$$a > m, a > n, b < m, b < n,$$

$$\text{或 } a < m, a < n, b > m, b > n,$$

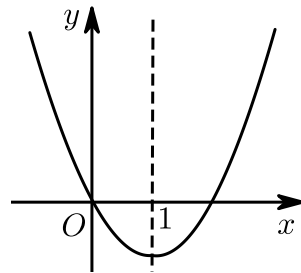
综上  $a < m < n < b$ .

**【标注】** 【知识点】 图象法求一元二次方程的近似根

## 11. 2020~2021学年北京朝阳区朝阳外国语学校初三上学期期中第11题3分 ★★★

二次函数  $y = x^2 + bx$  的图象如图, 对称轴为直线  $x = 1$ , 若关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 + bx - t = 0$  ( $t$  为实数) 在  $-1 < x < 4$  的范围内有解, 则  $t$  的取值范围是 ( ).





A.  $t \geq -1$

B.  $-1 \leq t < 3$

C.  $-1 \leq t < 8$

D.  $3 < t < 8$

**【答案】** C

**【解析】** 对称轴为直线  $x = -\frac{b}{2 \times 1} = 1$ ，解得  $b = -2$ ，

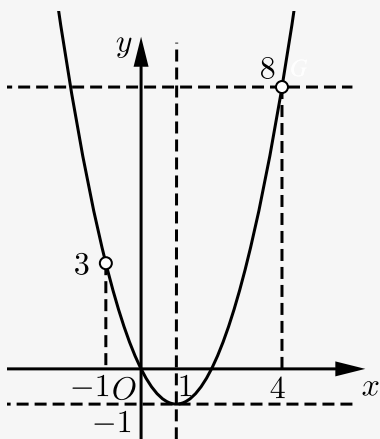
所以，二次函数解析式为  $y = x^2 - 2x$ ， $y = (x - 1)^2 - 1$ ，

当  $x = -1$  时， $y = 1 + 2 = 3$ ；当  $x = 4$  时， $y = 16 - 2 \times 4 = 8$ ，

$\therefore x^2 + bx - t = 0$  相当于  $y = x^2 + bx$  与直线  $y = t$  的交点的横坐标，

$\therefore$  当  $-1 \leq t < 8$  时，在  $-1 < x < 4$  的范围内有解。

故选 C。



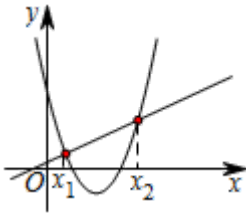
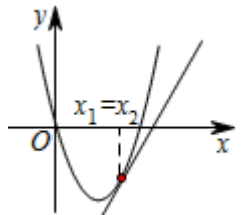
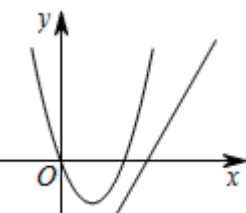
**【标注】**【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

### 三、二次函数与一次函数交点

求二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  与一次函数  $y = mx + n$  的交点：

联立两个函数解析式，整理可得  $ax^2 + (b - m)x + (c - n) = 0$ ，方程的根即两个函数交点的横坐标；

由方程根的情况，确定二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象与直线  $y = mx + n$  位置关系

| $ax^2 + (b-m)x + (c-n) = 0$<br>的判别式 $\Delta$ | 图象<br>(以 $a > 0$ 为例)                                                               | 与直线<br>$y = mx + n$<br>的交点情况 | 一元二次方程根的情况          |
|----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|---------------------|
| $\Delta > 0$                                 |   | 有 <u>两</u> 个交点               | 有 <u>两个不相等</u> 的实数根 |
| $\Delta = 0$                                 |   | 有 <u>一</u> 个交点               | 有 <u>两个相等</u> 的实数根  |
| $\Delta < 0$                                 |  | <u>无交点</u>                   | <u>无</u> 实数根        |

**【备注】** 对于二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  与一次函数  $y = mx + n (m \neq 0)$ ，联立两个函数解析式，消元得一元二次方程  $ax^2 + bx + c = mx + n$  并求解，此方程的解即是两个函数交点的横坐标；

反过来，若已知二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  与一次函数  $y = mx + n (m \neq 0)$  图象的交点，那么交点的横坐标就是一元二次方程  $ax^2 + bx + c = mx + n$  的解。

这部分在求解  $\Delta$  时，要注意将联立后的方程整理为一般形式再计算；当有一个交点时即一次函数与二次函数相切

## 🔗 举个“栗子”

### 栗子9

#### 12. 2018~2019学年10月天津河西区天津市海河中学初三上学期月考第19题8分 ★★

在平面直角坐标系中，抛物线  $y = ax^2$  与直线  $y = 2x + 3$  相交于  $A$ 、 $B$  两点，已知点  $A$  的坐标是  $(-1, 1)$ ，求点  $B$  的坐标。

**【备注】** 先根据  $A$  点坐标求出二次函数解析式，然后联立解方程

**【答案】**  $(3, 9)$ 。

**【解析】** 抛物线  $y = ax^2$  与直线  $y = 2x + 3$  相交于  $A$ 、 $B$  两点，

若点  $A$  的坐标是  $(-1, 1)$  ,

则点  $A$  坐标代入  $y = ax^2$  ,

解得  $a = 1$  ;

将两方程联立得 :  $x^2 = 2x + 3$  ,

解方程得 :  $x = -1$  或  $3$  ,

当  $x = 3$  时 ,  $y = 9$  ,

则点  $B$  坐标为  $(3, 9)$  .

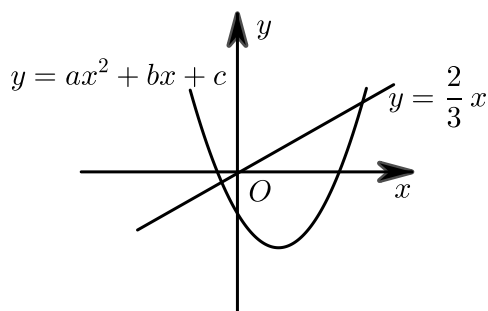
**【标注】**【知识点】一次函数与二次函数的交点

### 栗子10

13. 2019~2020学年天津东丽区天津市东丽中学初三上学期期中第10题3分 ★★

二次函数  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  和正比例函数  $y = \frac{2}{3}x$  的图象如图所示 , 则方程

$ax^2 + \left(b - \frac{2}{3}\right)x + c = 0 (a \neq 0)$  的根的情况 ( ) .



A. 两根都大于 0

B. 两根都等于 0

C. 两根都小于 0

D. 一根大于 0 , 一根小于 0

**【备注】** 该一元二次方程的根即一次函数与二次函数交点横坐标 , 由图可得有两个交点 , 且横坐标为一正一负

**【答案】** D

**【解析】** 设  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  的两根为  $x_1, x_2$  ,

$\therefore$  由二次函数的图象可知  $x_1x_2 < 0$  ,

$\therefore \frac{c}{a} < 0$  .

设方程  $ax^2 + \left(b - \frac{2}{3}\right)x + c = 0 (a \neq 0)$  的两根为  $m, n$  , 则  $mn = \frac{c}{a} < 0$  ,

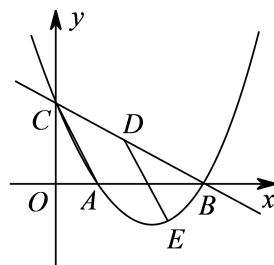
$\therefore$  方程  $ax^2 + \left(b - \frac{2}{3}\right)x + c = 0 (a \neq 0)$  的两根为一根大于 0 , 一根小于 0 ,

故选 D .

**【标注】**【知识点】一次函数与二次函数的交点

14. 2017~2018学年天津河西区初三上学期期中第25题10分 ★★★

如图，抛物线  $y = a(x-1)(x-4)$  与  $x$  轴相交于点  $A$ 、 $B$ （点  $A$  在点  $B$  的左侧），与  $y$  轴相交于点  $C$ ，点  $D$  在线段  $CB$  上（点  $D$  不与  $B$ 、 $C$  重合），过点  $D$  做  $CA$  的平行线，与抛物线相交于点  $E$ ，直线  $BC$  的解析式为  $y = kx + 2$ 。



- (1) 求点  $C$  的坐标和  $a$  的值。
- (2) 当点  $D$  为  $BC$  的中点时，求  $DE$  的长。
- (3) 在 (2) 的条件下，判断四边形  $CAED$  的形状，并加以证明。

**【备注】** (1)  $C$  点坐标可直接由一次函数解析式求得，然后将  $C$  点坐标代入二次函数中求出  $a$  值

(2)  $B$  点坐标可令二次函数  $y = 0$ ，解方程可得  $B(4, 0)$ ， $D$  点坐标由中点坐标公式求解即可

**中点坐标公式：**若  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，则  $A$ 、 $B$  中点  $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

(3) 与菱形的判定结合（有一组邻边相等的平行四边形是菱形），可进一步提问学生四边形的性质与判定

**【答案】** (1)  $C(0, 2)$ ， $a = \frac{1}{2}$ 。

(2)  $DE = \sqrt{5}$ 。

(3) 四边形  $CAED$  为菱形。

**【解析】** (1)  $\because BC: y = kx + 2$ ，

$\therefore C(0, 2)$ ，

将  $C(0, 2)$  代入  $y = a(x-1)(x-4)$ ，得  $a = \frac{1}{2}$ 。

(2)  $\because B(4, 0)$ ，

代入  $y = kx + 2$ ，

即  $0 = 4k + 2$ ，解得  $k = -\frac{1}{2}$ ，

$\therefore y = -\frac{1}{2}x + 2$ 。

$\because D$  为  $BC$  中点，

$\therefore D(2, 1)$ ，

$\because C(0, 2)$ ， $A(1, 0)$ ，

$\therefore CA: y = -2x + 2$ ，

$\therefore DE: y = -2x + b$ ，代入  $D(2, 1)$ ，

$$\therefore 1 = -4 + b,$$

$$\therefore b = 5,$$

$$\therefore \begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = \frac{1}{2}(x-1)(x-4) \end{cases},$$

$$\therefore E(3, -1),$$

$$\therefore DE = \sqrt{(2-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{5}.$$

(3) 四边形  $CAED$  为菱形,

$$\because DE = \sqrt{5}, AC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, AC \parallel DE,$$

$\therefore$  四边形  $CAED$  为平行四边形,

$$\text{又} \because CA = CD,$$

$\therefore$  四边形  $CAED$  为菱形.

**【标注】**【知识点】一次函数与二次函数的交点

## 独步天下2

### 15. 2019~2020学年天津和平区初三上学期期末第25题10分 ★★★

已知抛物线  $y_1 = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0, a \neq c$ ) 与  $x$  轴交于点  $A(1, 0)$ , 顶点为  $B$ .

(1) 当  $a = 1, c = 3$  时, 求抛物线的顶点  $B$  的坐标.

(2) 求抛物线  $y_1 = ax^2 + bx + c$  与  $x$  轴的另一个公共点的坐标 (用含  $a, c$  的式子表示).

(3) 若直线  $y_2 = 2x + m$  经过点  $B$  且与抛物线  $y_1 = ax^2 + bx + c$  交于另一点  $C\left(\frac{c}{a}, b+8\right)$ , 求当  $x \geq 1$  时,  $y_1$  的取值范围.

**【备注】** (2) 也可直接用配方法或公式法求解

(3) 中要结合 (2) 的结论, 即  $C$  点纵坐标为 0, 即  $b = -8$ ; 当  $a = 4$  时, 可得  $c = 4$ , 因为  $a \neq c$ , 所以  $a = 4$  舍去

**【答案】** (1)  $(2, -1)$ .

(2)  $\left(\frac{c}{a}, 0\right)$ .

(3)  $y_1 \geq -2$ .

**【解析】** (1)  $a = 1, c = 3, y_1 = x^2 + bx + 3$ , 过  $(1, 0)$ ,

$$\text{故 } 1 + b + 3 = 0,$$

$$\text{解得 } b = -4.$$

$$\therefore \text{解析式为 } y = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1,$$

故顶点  $B(2, -1)$ .

(2) 令  $ax^2 + bx + c = 0$ ,

$$\text{代入 } (1, 0) \text{ 可得: } a + b + c = 0,$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (a+c)^2 - 4ac = (a-c)^2,$$

$$\because a \neq 0,$$

$$\therefore \Delta > 0,$$

故方程有两个不等实根,

设两实根为  $x_1$  和  $x_2$ ,

由题意知  $x_1 = 1$ , 且  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ ,

$$\text{故 } x_2 = \frac{c}{a},$$

$\therefore$  另一个公共点坐标为  $(\frac{c}{a}, 0)$ .

(3) 由(2)知当  $x = \frac{c}{a}$  时,  $y = 0$ ,

$$\text{故 } b + 8 = 0, \quad b = -8,$$

$$\text{又 } a + b + c = 0,$$

$$\therefore c = 8 - a,$$

$$\therefore y_1 = ax^2 - 8x + 8 - a, \text{ 顶点 } B\left(\frac{4}{a}, -\frac{16}{a} - a + 8\right), \quad C\left(\frac{8-a}{a}, 0\right),$$

将  $B$ 、 $C$  代入  $y_2 = 2x + m$  中,

$$\begin{cases} -\frac{16}{a} - a + 8 = \frac{8}{a} + m \\ 0 = \frac{16-2a}{a} + m \end{cases},$$

解得:  $a = 2$  或  $4$  (舍),

$$\text{故 } a = 2, \quad b = -8, \quad c = 6,$$

$$\therefore y_1 = 2x^2 - 8x + 6, \text{ 对称轴为 } x = -\frac{b}{2a} = 2,$$

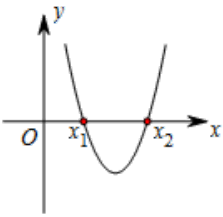
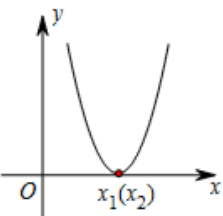
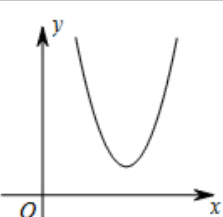
$$x = 2 \text{ 时}, \quad y_1 = -2,$$

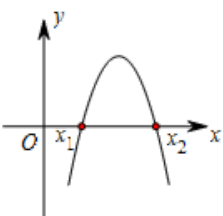
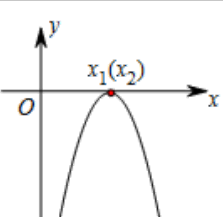
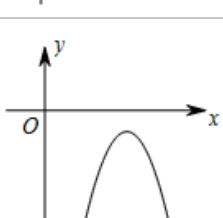
故  $y_1$  取值范围为  $y_1 \geq -2$ .

**【标注】**【知识点】一次函数与二次函数的交点

## 四、 根据函数图象求不等式的解集

### 1. “ $ax^2 + bx + c > 0$ ”型不等关系

|         | 图象                                                                                | 与 $x$ 轴的交点情况   | $ax^2 + bx + c > 0$<br>的解集                                   | $ax^2 + bx + c < 0$<br>的解集              |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------|--------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| $a > 0$ |  | 有 <u>两</u> 个交点 | <u><math>x &lt; x_1</math> 或 <math>x &gt; x_2</math></u>     | <u><math>x_1 &lt; x &lt; x_2</math></u> |
|         |  | 有 <u>一</u> 个交点 | <u><math>x \neq x_1</math> ( 或 <math>x \neq x_2</math> )</u> | <u>无解</u>                               |
|         |  | <u>无</u> 交点    | <u>全体实数</u>                                                  | <u>无解</u>                               |

|         | 图象                                                                                  | 与 $x$ 轴交点情况    | $ax^2 + bx + c > 0$<br>的解集              | $ax^2 + bx + c < 0$<br>的解集                                   |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------|-----------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| $a < 0$ |  | 有 <u>两</u> 个交点 | <u><math>x_1 &lt; x &lt; x_2</math></u> | <u><math>x &lt; x_1</math> 或 <math>x &gt; x_2</math></u>     |
|         |  | 有 <u>一</u> 个交点 | <u>无解</u>                               | <u><math>x \neq x_1</math> ( 或 <math>x \neq x_2</math> )</u> |
|         |  | <u>无</u> 交点    | <u>无解</u>                               | <u>全体实数</u>                                                  |

【备注】抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  在  $x$  轴上方部分的点的纵坐标都为正，所对应的  $x$  的值就是不等式

$ax^2 + bx + c > 0$ 的解集；

抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  在  $x$  轴下方部分的点的纵坐标都为负，所对应的  $x$  的值就是不等式  $ax^2 + bx + c < 0$  的解集；

如果不等式  $ax^2 + bx + c \geq 0$  或  $ax^2 + bx + c \leq 0$  中带有等号，其解集也相应的带有等号。

这部分也可变形为  $ax^2 + bx + c > m$ ，二次函数在  $y = m$  直线上方的部分的点的纵坐标都大于  $m$ ，所对应点的  $x$  的值就是不等式的解集；

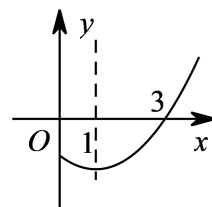
$ax^2 + bx + c < m$ ，二次函数在  $y = m$  直线下方的部分的点的纵坐标都小于  $m$ ，所对应点的  $x$  的值就是不等式的解集

## 🍌 举个“栗”子

### 栗子12

#### 16. 2020~2021学年10月天津和平区天津市第十九中学初三上学期月考第17题 ★★

如图是抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  的一部分，其对称轴为直线  $x = 1$ ，若其与  $x$  轴一交点为  $B(3, 0)$ ，则由图象可知，不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  的解集 \_\_\_\_\_。



**【备注】** 先求出与  $x$  轴交点的横坐标，在  $x$  轴上方的函数图象函数值为正

**【答案】**  $x < -1$  或  $x > 3$

**【解析】** 方法一：由对称轴  $x = 1$  和  $B(3, 0)$  可得：抛物线与  $x$  轴的另外一个交点的坐标为  $(-1, 0)$ ，

所以不等式的解集为  $x < -1$  或  $x > 3$ 。

方法二：∵ 抛物线与  $x$  轴的一个交点  $(3, 0)$ ，

而对称轴  $x = 1$ ，

∴ 抛物线与  $x$  轴的另一交点  $(-1, 0)$ ，

当  $y = ax^2 + bx + c > 0$  时，图象在  $x$  轴上方

此时  $x < -1$  或  $x > 3$ 。

故答案为： $x < -1$  或  $x > 3$ 。

**【标注】** 【知识点】利用二次函数解不等式问题

### 栗子13

#### 17. 2017~2018学年天津和平区初三上学期期末第11题3分 ★★★



已知二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  中，函数  $y$  与自变量  $x$  的部分对应值如表：

|     |          |    |   |   |   |   |          |
|-----|----------|----|---|---|---|---|----------|
| $x$ | $\cdots$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | $\cdots$ |
| $y$ | $\cdots$ | 10 | 5 | 2 | 1 | 2 | $\cdots$ |

则当  $y < 5$  时， $x$  的取值范围是（ ）。

- A.  $x < 0$  或  $x > 5$       B.  $0 < x < 5$       C.  $x < 0$  或  $x > 4$       D.  $0 < x < 4$

**【备注】** 根据表格可得顶点坐标为  $(2, 1)$ ， $(0, 5)$  和  $(4, 5)$  关于对称轴对称，因此  $0 < x < 4$ ；此题也可画出图象寻找在直线  $y = 5$  下方的部分所对应的  $x$  值

**【答案】** D

**【解析】** 由上表知  $a > 0$ 。

$\because x = 1$  时， $y = 2$ ，

$\because x = 3$  时， $y = 2$ ，

$\therefore$  对称轴为  $x = 2$ 。

$\because x = 0$  时， $y = 5$ ，

$\therefore x = 4$  时， $y = 5$ 。

$\therefore y < 5$  时， $0 < x < 4$ 。

**【标注】** 【知识点】利用二次函数解不等式问题

### 独步天下3

#### 18. 2019~2020学年11月天津河西区天津市第四十一中学初三上学期月考第12题 ★★★

若二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的图象与  $x$  轴的交点坐标分别为  $(x_1, 0)$ ， $(x_2, 0)$ ，且  $x_1 < x_2$ ，图象上有一点  $M(x_0, y_0)$  在  $x$  轴下方，对于以下说法：

- ①  $b^2 - 4ac > 0$ ；②  $x = x_0$  是方程  $ax^2 + bx + c = y_0$  的解；③  $x_1 < x_0 < x_2$ ；④

$$a(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) < 0.$$

其中正确的是（ ）。

- A. ①③④      B. ①②④      C. ①②③      D. ②③

**【备注】** ③此题无法确定开口方向，当  $a < 0$  时，确定不了  $x_0$ 、 $x_1$ 、 $x_2$  的大小关系；

④此题需要分类讨论：

当  $a > 0$  时， $x_1 < x_0 < x_2$ ，不等式成立；

当  $a < 0$ ， $x_0 < x_1 < x_2$  时，不等式成立；当  $a > 0$ ， $x_1 < x_2 < x_0$  时，不等式成立；

所以④正确

**【答案】** B

**【解析】** 二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的图象与  $x$  轴有两个交点，无法确定  $a$  的正负情况

①  $\because x_1 < x_2$ ,

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac > 0$ , 故本选项正确;

②  $\because$  点  $M(x_0, y_0)$  在二次函数  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  的图象上,

$\therefore x = x_0$  是方程  $ax^2 + bx + c = y_0$  的解, 故本选项正确;

③ 若  $a > 0$ , 则  $x_1 < x_0 < x_2$ ,

若  $a < 0$ , 则  $x_0 < x_1 < x_2$  或  $x_1 < x_2 < x_0$ , 故本选项错误;

④ 若  $a > 0$ , 则  $x_0 - x_1 > 0$ ,  $x_0 - x_2 < 0$ ,

所以,  $(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) < 0$ ,

$\therefore a(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) < 0$ ,

若  $a < 0$ , 则  $(x_0 - x_1)$  与  $(x_0 - x_2)$  同号,

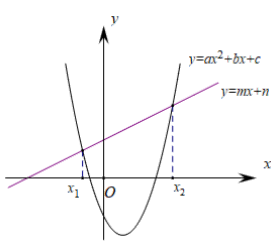
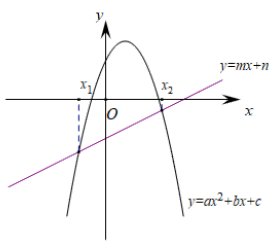
$\therefore a(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) < 0$ ,

综上所述,  $a(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) < 0$  正确, 故本选项正确.

故选: B.

**【标注】**【知识点】利用二次函数解不等式问题

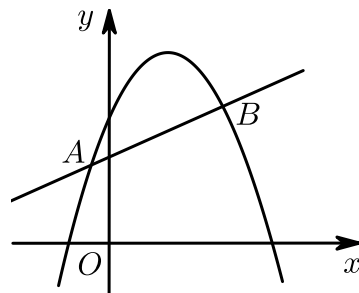
## 2. 物线 $y_1 = ax^2 + bx + c$ , 直线 $y_2 = mx + n (m > 0)$ 的不等关系

|         | 图象                                                                                  | 解集                                                  |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| $a > 0$ |  | $ax^2 + bx + c > mx + n$ 的解集为 $x < x_1$ 或 $x > x_2$ |
|         |                                                                                     | $ax^2 + bx + c = mx + n$ 的解为 $x = x_1$ 或 $x = x_2$  |
|         |                                                                                     | $ax^2 + bx + c < mx + n$ 的解集为 $x_1 < x < x_2$       |
| $a < 0$ |  | $ax^2 + bx + c < mx + n$ 的解集为 $x < x_1$ 或 $x > x_2$ |
|         |                                                                                     | $ax^2 + bx + c = mx + n$ 的解为 $x = x_1$ 或 $x = x_2$  |
|         |                                                                                     | $ax^2 + bx + c > mx + n$ 的解集为 $x_1 < x < x_2$       |

**【备注】** 解题时不等号的左右两侧应与一次函数与二次函数解析式的形式相同, 如若不同则需要移项变为相同; 函数之间比较大小, 可在交点左右两侧分别进行判断, 遵循函数谁在上谁大的原则, 找出对应的函数图象的  $x$  的范围

19. 2017年湖北咸宁初三中考二模第12题 ★★

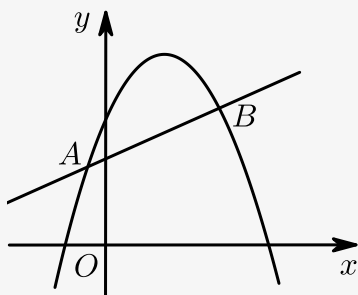
如图，直线  $y = mx + n$  与抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  交于  $A(-1, p)$ ， $B(4, q)$  两点，则关于  $x$  的不等式  $mx + n > ax^2 + bx + c$  的解集是 \_\_\_\_\_ .



**【备注】** 要满足一次函数大于二次函数，在两个交点的左右两个满足

**【答案】**  $x < -1$  或  $x > 4$

**【解析】**



观察函数图象可知：当  $x < -1$  或  $x > 4$  时，

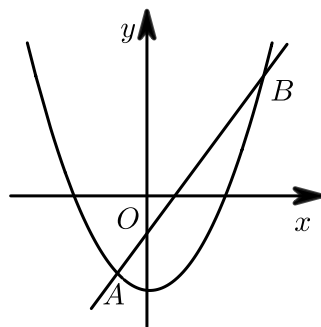
直线  $y = mx + n$  在抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  的上方，

∴ 不等式  $mx + n > ax^2 + bx + c$  的解集为  $x < -1$  或  $x > 4$  .

**【标注】** 【知识点】 利用二次函数解不等式问题

20. 2019年山东济宁中考真题第15题3分 ★★

如图，抛物线  $y = ax^2 + c$  与直线  $y = mx + n$  交于  $A(-1, p)$ ， $B(3, q)$  两点，则不等式  $ax^2 + mx + c > n$  的解集是 \_\_\_\_\_ .



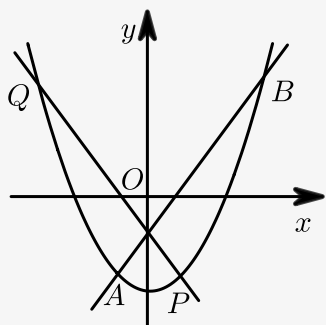
**【备注】** 注意先将  $mx$  移到右侧，凑出一次函数与二次函数解析式的形式

**【答案】**  $x < -3$  或  $x > 1$

**【解析】**  $\because$  抛物线  $y = ax^2 + c$  与直线  $y = mx + n$  交于  $A(-1, p)$ ， $B(3, q)$  两点，

$$\therefore -m + n = p, \quad 3m + n = q,$$

$\therefore$  抛物线  $y = ax^2 + c$  与直线  $y = -mx + n$  交于  $P(1, p)$ ， $Q(-3, q)$  两点，



观察函数图象可知：当  $x < -3$  或  $x > 1$  时，直线  $y = -mx + n$  在抛物线  $y = ax^2 + c$  的下方．

$\therefore$  不等式  $ax^2 + mx + c > n$  的解集为  $x < -3$  或  $x > 1$ ．

故答案为  $x < -3$  或  $x > 1$ ．

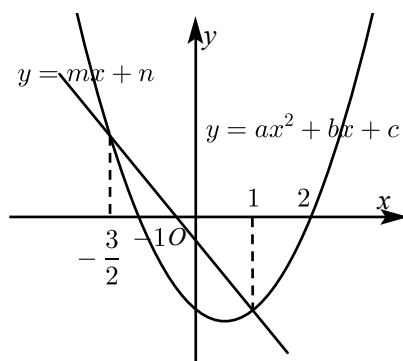
**【标注】** 【知识点】 利用二次函数解不等式问题

## 栗子16

21. 2017~2018学年9月天津和平区天津市第二南开中学初三上学期月考第18题3分 ★★

直线  $y = mx + n$  和抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  在同一坐标系中位置如图所示，那么不等式

$mx + n < ax^2 + bx + c < 0$  的解集是 \_\_\_\_\_ ．



**【备注】** 分别判断  $mx + n < ax^2 + bx + c$  与  $ax^2 + bx + c < 0$  的解集，然后取不等式组的解集

**【答案】**  $1 < x < 2$

**【解析】**  $\because mx + n < ax^2 + bx + c < 0$  ,  
 $\therefore 1 < x < 2$  .

**【标注】** 【知识点】 利用二次函数解不等式问题